Lois de probabilités
continues (ou à densité)

Partie 1

I) Loi de probabilité à densité

1) Introduction

Exemple : Soit *X la variable aléatoire mesurant la durée exacte du temps d'attente aux urgences d'un* hôpital

On suppose que ce temps d'attente est toujours inférieur à 3 heures.

La variable aléatoire *X peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle [0 ; 3]. On ne peut donc pas* énumérer les possibilités sous la forme $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_i}$.

*On dit que la loi de probabilité de X **est à densité.***

Le calcul de la probabilité que le temps d'attente soit exactement de 2 h 31min est ici complètement inutile. Il serait par contre intéressant de déterminer la probabilité que ce temps d'attente soit compris entre 1 et 2 heures (ce que l'on notera *p (X∈ [1 ; 2]) ou bien soit inférieure à une heure et demi (ce que* l'on notera *p (X ≤ 1, 5)).*

2) Fonction de Densité de probabilité

Définition 1 :

On appelle fonction de densité sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a<b$, toute fonction f vérifiant les trois conditions suivantes :

1) f est définie et continue sur $[a\,;b]$.
2) $f(x)\geq 0$ sur $[a\,;b]$.
3) $\int_a^b f(x)dx=1$.

Définition 2 :

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I et X une variable aléatoire à valeurs dans I. On dit que X suit la loi de densité de f si pour tous réels a et b dans I ($a<b$) :

$$p(X\in[a\,;b])=\int_a^b f(x)dx$$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur I.

Pour tout $a\in I$: $p(X=a)=\int_a^a f(x)dx=0$

Conséquence : $p(X\leq a)=p(X<a)$

Exercices n° 5 page 229 sur le modèle de l'exercice résolu n° 1 de la même page.
Exercices n° 26 et 27 page 235.

3) **Espérance et variance**

Définition 1: Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[a\,;b]$. L'espérance mathématique de X est le nombre réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \int_a^b x \times f(x)dx$$

Définition 2: Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[a\,;b]$. La variance de X est le nombre réel $\mathrm{V}(X)$ défini par :

$$\mathrm{V}(X) = \int_a^b (x - \mathrm{E(X)})^2 \times f(x)dx$$

Exemple : soit X une var de densité f(x) = 2x sur [0;1].
- Vérifier que f est bien une densité et calculer E(X) et sa variance.

II) Loi uniforme sur l'intervalle [a ; b]

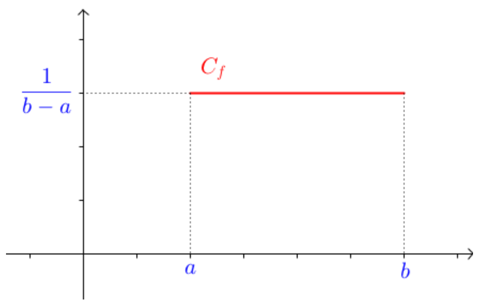
1) Définition et propriété

Propriété :
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f la fonction définie sur $[a\,;b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Alors f est une densité de probabilité sur $[a\,;b]$

Représentation graphique de f sur $[a\,;b]$:



Démonstration :
f est continue sur $[a\,;b]$ et est clairement positive.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Définition :
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;b]$ lorsque X admet comme densité de probabilité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{b-a}}$$

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a\,;b])$. Alors, pour tout nombre c et d de $[a\,;b]$, tel que $c < d$, on a :

$$p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{}{b-a}[t]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$$

Exemple :

On suppose que le temps d'attente aux urgences d'un hôpital suit la loi uniforme sur $[0\,;3]$.
X est la variable aléatoire associé au temps d'attente aux urgences. X suit la loi $U([0\,;3])$.

1) Calculer la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 1 et 2h.
2) Calculer la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 1,5h.

Exemple : On reprend l'exemple 1 du 1.1 et on suppose que le temps d'attente au urgences de cet hôpital suit la loi uniforme sur $[0\,;3]$. On a alors :

$$p(X \in [1\,;2]) = \int_1^2 \frac{1}{3-0}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(X \leq 1,5) = \int_0^{1,5} \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{3}\right]_0^{1,5} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$$

2) Espérance mathématique d'une loi uniforme

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a\,;b])$. Alors

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Exemple :
Dans l'exemple précédent, X suit la loi uniforme $U([0;3])$.
Ainsi : $E(X) = \frac{0+3}{2} = 1{,}5$
Sur un grand nombre de patients aux urgences, on peut en moyenne espérer attendre 1,5h.